



TITLE:

# 二次元ポアズイユ流れの三次元有限攪乱に対する安定性 (連続体力学における非線型方程式の近似解法)

AUTHOR(S):

伊藤, 信毅

---

CITATION:

伊藤, 信毅. 二次元ポアズイユ流れの三次元有限攪乱に対する安定性 (連続体力学における非線型方程式の近似解法). 数理解析研究所講究録 1975, 244: 13-30

ISSUE DATE:

1975-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105618>

RIGHT:

## 二次元ポアズイユ流れの三次元 有限攪乱に対する安定性

航技研 伊藤 信 毅

### 1. 序

平行流あるいは境界層における層流から乱流への遷移は、いわゆる線型安定理論<sup>1)</sup>に従う微小な二次元波動の増幅で始まる。この二次元波は、振幅がある程度大きくなると、流れと直角な方向(スパン方向)にも変動する三次元的な波になることが観測されている<sup>2)</sup>。攪乱の二次元から三次元への移行はそれを支配する運動方程式の非線型性に依存するのであろう事はしばしば指摘されているが、攪乱の三次元的機構に関する理論的研究はまだ十分進んでいない。Stuart<sup>3)</sup>とWatson<sup>4,5)</sup>の非線型安定理論およびそれに続く数値計算<sup>6-9)</sup>は主として二次元攪乱の発達に関するものである。三次元攪乱の非線型的発達を調べた研究で最も注目されるものはBenneyとLin<sup>10-12)</sup>の研究である。彼等は二次元波とスパン方向に周期性を持つ三次元波の干渉によって平均流場に縦渦が発生することとを導いた。し

かし、この理論は、二次元波と三次元波の位相速度を同じと仮定している共に重大な欠陥を含んでいる。Stuart<sup>(13)</sup>はStuart-Watson理論と三次元問題に拡張した理論を与えているが、のちに述べるように不適当と思われる仮定を導入したため、二次元波と三次元波の位相関係を導くことに失敗している。また、この理論に依る数値計算が今迄に行われていないので、攪乱の発達の具体的な性質が示されていない。Craink<sup>(14)</sup>は二次元攪乱が存在するときに最も発生しやすい三次元波のスパン方向波数を決める理論を与えている。これは、今迄得られなかった三次元波の重要な性質の一つを説明している共に興味深い研究である。最近、Stewartsonその他<sup>(15-17)</sup>はStuart-Watson理論を発展させ、攪乱の時間的および空間的発達を記述する理論を与えている。とくに、文献16, 17は三次元性を含んでいるので注目されるが、実験で観測されるような強い三次元性を十分説明するものではない。

本稿では、以上の研究でもまだ明らかになっていない攪乱の三次元的発達の諸性質、とくに以下の三点を明らかにすることを目的とする。1) 実験で観測される二次元波から三次元的な波への移行が確かに非線型性の結果として説明できるか。2) 二次元波と三次元波が共存するとき、その干渉は各々の波の発達にどう作用するか。3) 二次元波と三次元波の位相の間

にどのような関係があるか。

解析の方法は Stuart<sup>(3)</sup> の二次元非線型安定理論を発展させたものである。また、二次元ポアズイユ流における攪乱の具体的な性質を知るために数値計算を行っている。

## 2. Fourier 解析

直交座標  $(x, y, z)$  に対し、 $x$  方向に向う平行な基本流の速度成分を  $(U(y), 0, 0)$  とする (ただし、 $U(y) = 1 - y^2$ )。これに速度成分  $v = (u, v, w)$  の攪乱を重ね合せて Navier-Stokes 方程式と連続の式に代入し、圧力項を消去すると、つぎの攪乱方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \left[ \Delta^2 - R \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta - \frac{dU}{dy^2} \frac{\partial}{\partial x} \right\} \right] v \\ &= -R \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) u - \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) v \right\} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) w - \frac{\partial}{\partial z} \left( u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) v \right\} \right\} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[ \Delta \frac{\partial}{\partial y} - R \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{dU}{dy} \frac{\partial}{\partial x} \right\} \right] u \\ &= \left[ \Delta \frac{\partial}{\partial x} - R \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{dU}{dy} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{d^2 U}{dy^2} \right\} \right] v \\ & \quad + R \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) u - \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) v \right] \quad (2) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

ただし、 $\Delta \equiv \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$ 、全ての量は平板間の距離の半分  $L$  と基本流の最大速度  $U_0$  で無次元化されているものとする

る。また、Reynolds数は  $R = U_0 L / \nu$  ( $\nu$ : 動粘性係数) で与えられる。

いま、攪乱  $V$  を時間  $t$  に関する Fourier 級数に展開し、

$$V(x, y, z, t) = V_0(x, y, z) + V_1(x, y, z) e^{-i\beta t} + \text{c. c.} \\ + V_2(x, y, z) e^{-2i\beta t} + \text{c. c.} + \dots \quad (4)$$

と書く。ここで、攪乱は空間的に増幅または減衰するものと考え、 $\beta$  を実数の振動数とする。(4) を方程式に代入し、各 Fourier 成分に分解すると、無限次元の連立方程式が得られる。Stuart-Watson 理論に従って、(4) の  $n$  次 Fourier 成分が基本波成分の  $n$  乗の大きさを (0 次成分は 2 乗の大きさを) と仮定すると、3 次以上の Fourier 成分を無視することができ、つぎの 3 組の方程式を解けば、非線型性を含んだ第 1 近似解が得られる。

$$\left. \begin{aligned} L_v V_1 &= M_v(V_0, V_1) + M_v(V_2, \tilde{V}_1), \quad L_u U_1 = L_v^* V_1 + M_u(V_0, V_1) + M_u(V_2, \tilde{V}_1) \\ \partial u_1 / \partial x + \partial v_1 / \partial y + \partial w_1 / \partial z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} L_v V_0 &= M_v(V_1, \tilde{V}_1), \quad L_u U_0 = L_v^* V_0 + M_u(V_1, \tilde{V}_1) \\ \partial u_0 / \partial x + \partial v_0 / \partial y + \partial w_0 / \partial z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} L_v V_2 &= \frac{1}{2} M_v(V_1, V_1), \quad L_u U_2 = L_v^* V_2 + \frac{1}{2} M_u(V_1, V_1) \\ \partial u_2 / \partial x + \partial v_2 / \partial y + \partial w_2 / \partial z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここで、 $\sim$  は複素共役、 $L_v, L_u$  は (1), (2) の左辺の線型作用素、 $L_v^*$  は (2) の右辺の線型作用素、 $M_v, M_u$  は (1), (2) の非線型作用素を表わす。この連立方程式を解くには、(5) の非線型項を無視した解、すなわち線型解を求め、これを (6) と (7) の非線型項に

代入し、平均流中がみ  $V_0$  と二倍高調波  $V_2$  を求める。つぎに、これらと線型解 (5) の非線型項に代入して、基本波  $V_1$  についての非線型解を求めればよい。なお、境界条件は以下のようになる。ただし、 $\gamma$  は  $y$  に関する微分を表わす。

$$\left. \begin{aligned} \gamma=0 \text{ で } & V_1' = V_1'' = u_1 = u_1'' = v_0 = v_0'' = u_0' = u_0'' = v_2 = v_2'' = u_2' = u_2'' = 0 \\ \gamma=1 \text{ で } & v_n = v_n' = u_n = 0 \quad (n=0, 1, 2) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

まず、線型解として二次元波とスパン方向に定常的な周期性(波数  $\gamma$ ) を持つ三次元波を加え合せたものを考える。

$$V_1(x, y, z) = \frac{A}{2} V_0(\gamma) e^{i\alpha_2 x} + \frac{B}{4} \{ V_{11}(\gamma) e^{i\gamma z} + V_{11}^*(\gamma) e^{-i\gamma z} \} e^{i\alpha_3 x} \quad (9)$$

ただし、 $A$  と  $B$  はそれぞれ二次元波と三次元波の振幅を表わす複素数、\*印は  $w$  成分の符号を逆転させることを意味する。 $V_0(\gamma)$  と  $V_{11}(\gamma)$  はつぎのように正規化された函数である。

$$V_{10}(0) = V_{11}(0) = 1 \quad (10)$$

(9) を線型方程式に代入し、同次型境界条件 (8) のもとに固有値問題を解くと、複素数の固有値  $\alpha_2, \alpha_3$  および固有函数  $V_{10}(\gamma), V_{11}(\gamma)$  が  $R, \beta, \gamma$  の函数として得られる。 $\alpha_2$  と  $\alpha_3$  の実数部が二次元波と三次元波の  $x$  方向の波数を表わし、虚数部が減衰率を表わす。

つぎに、線型解 (9) を (6) と (7) の非線型項に代入し、非同次型方程式を解く。このとき  $V_0$  および  $V_2$  はそれぞれつぎの形に書ける。

$$\begin{aligned}
V_0(x, y, z) = & \frac{|A|^2}{4} V_{00a}(y) e^{i(\alpha_2 - \tilde{\alpha}_2)x} + \frac{|B|^2}{8} V_{00b}(y) e^{i(\alpha_3 - \tilde{\alpha}_3)x} \\
& + \frac{AB}{8} \{ V_{01}(y) e^{i\gamma z} + V_{01}^*(y) e^{-i\gamma z} \} e^{i(\alpha_2 - \tilde{\alpha}_2)x} + c. c. \\
& + \frac{|B|^2}{16} \{ V_{02}(y) e^{2i\gamma z} + \tilde{V}_{02}(y) e^{-2i\gamma z} \} e^{i(\alpha_3 - \tilde{\alpha}_3)x} \quad (11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_2(x, y, z) = & \frac{A^2}{8} V_{20a}(y) e^{2i\alpha_2 x} + \frac{B^2}{16} V_{20b}(y) e^{2i\alpha_3 x} \\
& + \frac{AB}{8} \{ V_{21}(y) e^{i\gamma z} + V_{21}^*(y) e^{-i\gamma z} \} e^{i(\alpha_2 + \alpha_3)x} \\
& + \frac{B^2}{32} \{ V_{22}(y) e^{2i\gamma z} + V_{22}^*(y) e^{-2i\gamma z} \} e^{2i\alpha_3 x} \quad (12)
\end{aligned}$$

以上の解(9), (11), (12)を(5)の非線型項に代入して,  $V_1$ に対する非同次方程式を解く。この場合, (5)の第1式の左辺は線型方程式と同じであるから, 非同次項に掛る  $\exp(i\alpha x)$  型の項のパラメータ  $\alpha$  が線型方程式の固有値  $\alpha_2$  または  $\alpha_3$  に一致すると, 解は発散する。このような発散を避けるため, 特解に適當な線型解を加えて, (5)の一般解を次のようにおく。

$$V_1(x, y, z) = \frac{A}{2} \hat{V}_{10}(x, y) + \frac{B}{4} \{ \hat{V}_{11}(x, y) e^{i\gamma z} + \hat{V}_{11}^*(x, y) e^{-i\gamma z} \} \quad (13)$$

と書くと, 且,

$$\begin{aligned}
\hat{V}_{10}(x, y) = & V_{10}(y) \left\{ e^{i\alpha_2 x} + \lambda_{AA} \frac{|A|^2}{4} \frac{e^{i(2\alpha_2 - \tilde{\alpha}_2)x} - e^{i\alpha_2 x}}{\alpha_2 - \tilde{\alpha}_2} + \lambda_{AB} \frac{|B|^2}{16} \frac{e^{i(\alpha_2 + \alpha_3 - \tilde{\alpha}_3)x} - e^{i\alpha_2 x}}{\alpha_3 - \tilde{\alpha}_3} \right. \\
& \left. + \lambda_{AC} \frac{\tilde{A}}{A} \frac{B^2}{16} \frac{e^{i(2\alpha_3 - \tilde{\alpha}_2)x} - e^{i\alpha_2 x}}{2\alpha_3 - \alpha_2 - \tilde{\alpha}_2} \right\} + \left\{ \frac{|A|^2}{4} V_{AA}(y) e^{i(2\alpha_2 - \tilde{\alpha}_2)x} \right. \\
& \left. + \frac{|B|^2}{16} V_{AB}(y) e^{i(\alpha_2 + \alpha_3 - \tilde{\alpha}_3)x} + \frac{\tilde{A}}{A} \frac{B^2}{16} V_{AC}(y) e^{i(2\alpha_3 - \tilde{\alpha}_2)x} \right\} \quad (14)
\end{aligned}$$

$$\hat{V}_{11}(x, y) = \hat{V}_{11}(y) \left\{ e^{i\alpha_3 x} + \lambda_{BA} \frac{|A|^2}{4} \frac{e^{i(\alpha_3 + \alpha_2 - \tilde{\alpha}_2)x} - e^{i\alpha_3 x}}{\alpha_2 - \tilde{\alpha}_2} + \lambda_{BB} \frac{|B|^2}{16} \frac{e^{i(2\alpha_3 - \tilde{\alpha}_3)x} - e^{i\alpha_3 x}}{\alpha_3 - \tilde{\alpha}_3} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda_{bc} \frac{\tilde{B}}{B} \frac{A^2}{4} \frac{e^{i(2\alpha_2 - \tilde{\alpha}_3)x} - e^{i\alpha_2 x}}{2\alpha_2 - \alpha_3 - \tilde{\alpha}_3} \Big\} + \Big\{ \frac{|A|^2}{4} V_{BA}(y) e^{i(\alpha_3 + \alpha_2 - \tilde{\alpha}_2)x} \\
& + \frac{|B|^2}{16} V_{BB}(y) e^{i(2\alpha_3 - \tilde{\alpha}_3)x} + \frac{\tilde{B}}{B} \frac{A^2}{4} V_{Bc}(y) e^{i(2\alpha_2 - \tilde{\alpha}_3)x} \Big\} \quad (15)
\end{aligned}$$

ただし,  $V_{10}(y)$ ,  $V_{11}(y)$  は線型解の固有函数である。また,  $\hat{V}_{10}(x, y)$ ,  $\hat{V}_{11}(x, y)$  が正規化条件(10)をみたすためには

$$V_{AA}(0) = V_{AB}(0) = V_{Ac}(0) = V_{BA}(0) = V_{BB}(0) = V_{Bc}(0) = 0 \quad (16)$$

が必要である。以上の解を方程式(5)に代入すると, 係数 $\lambda_{AA}$ 等は方程式の可解条件から定まり, 函数 $V_{AA}(y)$ 等は正規化条件(16)から唯一に定まる。

解(14), (15)の前半は非線型効果が波数・減衰率へ与える影響を表わし, 後半は攪乱の $y$ 方向分布への影響を表わしている。すなわち, いま着目している原系 $x=y=0$ における極値をとると, 二次元波と三次元波の波数・減衰率がそれぞれのように求まる。

$$\hat{\alpha}_2 = \lim_{x, y \rightarrow 0} \frac{\partial \hat{V}_{10}(x, y)}{\partial x} = \alpha_2 + \lambda_{AA} \frac{|A|^2}{4} + \lambda_{AB} \frac{|B|^2}{16} + \lambda_{Ac} \frac{\tilde{A}}{A} \frac{B^2}{16} \quad (17)$$

$$\hat{\alpha}_3 = \lim_{x, y \rightarrow 0} \frac{\partial \hat{V}_{11}(x, y)}{\partial x} = \alpha_3 + \lambda_{BA} \frac{|A|^2}{4} + \lambda_{BB} \frac{|B|^2}{16} + \lambda_{Bc} \frac{\tilde{B}}{B} \frac{A^2}{4} \quad (18)$$

この実数部が波数, 虚数部が減衰率である。上式は線型理論から求まる固有値 $\alpha_2, \alpha_3$ に非線型効果による補正項が加わった形である。(4)で省略した3次以上の Fourier 成分を考慮すれば, (17), (18)の右辺には振幅の高次の項が現われる。

Stuart<sup>(13)</sup>は(17), (18)と同様の式を導いているが, 彼は $\lambda_{Ac} = \lambda_{Bc} = 0$ と置いている。すなわち, (14)と(15)において $2\alpha_3 - \tilde{\alpha}_2$ と $2\alpha_2 - \tilde{\alpha}_3$ が



それぞれ  $\alpha_2$  と  $\alpha_3$  から十分離れているとして、これらの特異点を無視した。しかし、 $\gamma=0$  の極限を考えれば明らかのようにこの仮定は正しくない。本稿では (17), (18) の最後の項も含めたまゝで解析を進める。

### 3. 計算結果とその解釋

前節で得た攪乱方程式の解は任意に選んだ  $x$  方向の原光の近傍における局所的な解である。(17) と (18) の実数部と虚数部を分ければ、任意の  $x$  における二次元波と三次元波の振幅および位相の変化率を知ることが出来る。いま、二次元波と三次元波の位相の差を  $\theta/2$  と書く。すなわち、

$$\theta = 2(\theta_3 - \theta_2), \quad A = |A|e^{i\theta_2}, \quad B = |B|e^{i\theta_3} \quad (19)$$

このとき、 $|A|^2, |B|^2, \theta$  の  $x$  に関する変化率は

$$-\frac{1}{2|A|^2} \frac{d|A|^2}{dx} \equiv \hat{\alpha}_{2i} = \alpha_{2i} + \lambda_{AAi} \frac{|A|^2}{4} + \{\lambda_{ABi} + |\lambda_{AC}| \sin(\theta + \sigma_{AC})\} \frac{|B|^2}{16} \quad (20)$$

$$-\frac{1}{2|B|^2} \frac{d|B|^2}{dx} \equiv \hat{\alpha}_{3i} = \alpha_{3i} + \{\lambda_{BAi} - |\lambda_{BC}| \sin(\theta - \sigma_{BC})\} \frac{|A|^2}{4} + \lambda_{BBi} \frac{|B|^2}{16} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d\theta}{dx} \equiv \hat{\alpha}_{3r} - \hat{\alpha}_{2r} = \alpha_{3r} - \alpha_{2r} + \{\lambda_{BAr} - \lambda_{AAr} + |\lambda_{BC}| \cos(\theta - \sigma_{BC})\} \frac{|A|^2}{4} \\ + \{\lambda_{BBr} - \lambda_{ABr} - |\lambda_{AC}| \cos(\theta + \sigma_{AC})\} \frac{|B|^2}{16} \end{aligned} \quad (22)$$

ただし、 $\lambda_{AC} = |\lambda_{AC}|e^{i\sigma_{AC}}$ ,  $\lambda_{BC} = |\lambda_{BC}|e^{i\sigma_{BC}}$ , また添字  $r, i$  はそれぞれ実数部と虚数部を表わす。(20) - (22) は  $(|A|^2, |B|^2, \theta)$  を座標軸とする三次元空間における曲線群を表わす。しかし、二次元位

相平面の場合と違って、三次元空間でのトラジェクトリを描くことは非常に困難であり、これらの方程式から一般的な結論を導くことはできない。ここでは、前節に依り数値計算によって(20)-(22)に現われる係数の数値を知り、そこから攪乱の発達の具体的な性質を調べる。

数値計算はべき級数展開法<sup>(8)</sup>を用い、 $R = 5000 \sim 8000$ ,  $\beta = 0.15 \sim 0.30$ ,  $\gamma = 0.1 \sim 1.0$ の範囲に対して行った。Stuart-Watson理論は線型解が中立曲線から離れるにつれて精度が悪くなる。とくに、亜限界 Reynolds 数では、平均流ゆがみ方程式の特異点の影響が解の発散をもたらす欠点がある<sup>(8)</sup>。ここでは、この問題を避けるため、亜限界状態(線型解の固有値 $\alpha_2$ または $\alpha_3$ の虚数部が正の値をとるとき)に対しては、(6)および(7)の解の減衰率を0とおいている。この仮定は、線型解が中立曲線からひどく離れていない限り、あまり大きな誤差をもたらさない。

まず始めに、(20)-(22)の形から直接判る諸性質を述べる。三次元波の存在が二次元波の減衰率に与える影響は(20)の $|B|^2$ の係数の符号に依存する。すなわち、下記の3つの場合がある。

(i)  $\lambda_{ABi} - |\lambda_{Ac}| > 0$  の場合: (20)の $|B|^2$ の係数は0に無関係に正の値をとるから、三次元波の存在は二次元波を減衰させようとする効果を持つ。

(ii)  $\lambda_{ABi} + |\lambda_{Ac}| < 0$  の場合: 逆に、三次元波は二次元波に増幅

作用をおよぼす。

(iii)  $|\lambda_{ABi}|$  と  $|\lambda_{AC}|$  の場合: (20) の  $|B|^2$  の係数は  $\theta$  の値によって符号を変えるので, 三次元波が二次元波に与える影響は不定である。

数値結果による  $\lambda_{ABi}$  と  $|\lambda_{AC}|$  の比較は図1に示した。左は  $\beta$  を一定にして  $\gamma$  を変えたとき, 右は  $\gamma$  を

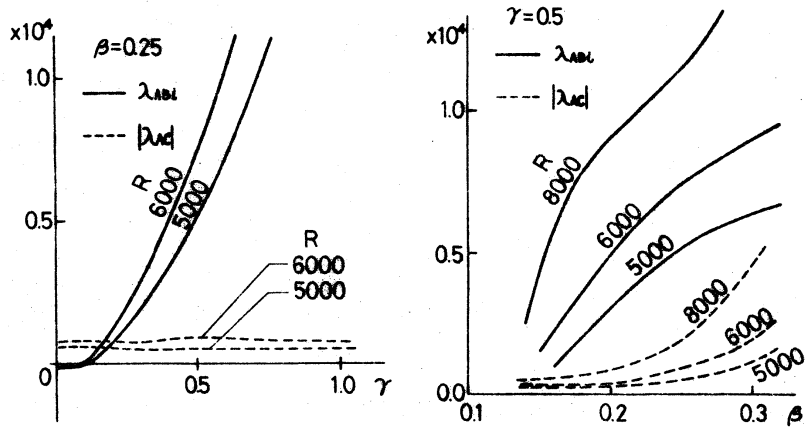


図1.  $\lambda_{ABi}$  と  $|\lambda_{AC}|$  の比較

一定にして  $\beta$  を変えたときの比較である。これから,  $\beta$  が約 0.15 以上,  $\gamma$  が 0.25 以上程度の大きさに対しては, (i) の場合が成り立っていることがわかる。三次元波は二次元波を減衰させる効果を持つと言える。

つぎに, 二次元波が三次元波の減衰率に与える影響を調べる。(21) の  $|A|^2$  の係数の符号をみればよい。図2には  $\lambda_{BAi}$

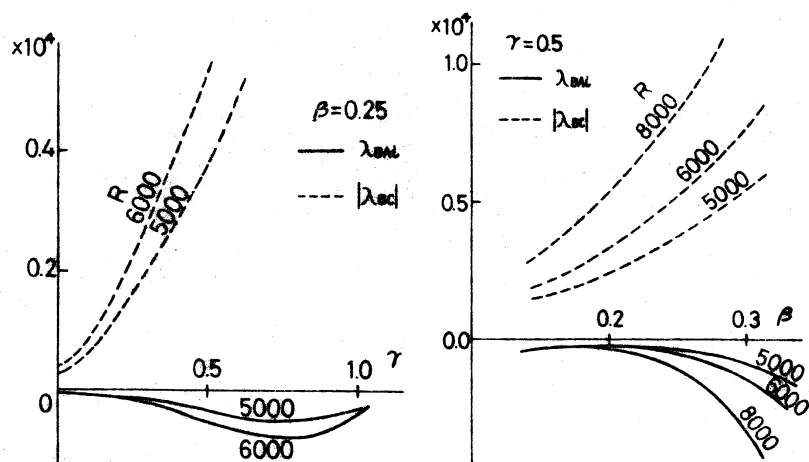


図2.  $\lambda_{BAi}$  と  $|\lambda_{BC}|$  の比較

と  $|\lambda_{bc}|$  の比較が与えられているが、これより  $|\lambda_{bai}| < |\lambda_{bc}|$  であることがわかる。すなわち、二次元波が三次元波の減衰率に与える影響は二つの波の位相差に依存するものである。

もう一つ興味のある性質が(21)から導かれる。攪乱が純粹に二次元でありつづける為には、無限に小さい三次元波が常に減衰するという条件が必要である。これは、 $|B|^2 = 0$  のとき、(21)の右辺が任意の  $\theta$  に対して正になることである。

$$\alpha_{3i} + (\lambda_{bai} - |\lambda_{bc}|) \frac{|A|^2}{4} > 0 \quad (23)$$

図2より  $|\lambda_{bai}| < |\lambda_{bc}|$  だから

$$\frac{|A|^2}{4} < \frac{\alpha_{3i}}{|\lambda_{bc}| - \lambda_{bai}} \quad (24)$$

が三次元微小攪乱に対する安定条件である。(24)の右辺は、一種の限界振幅と考えること

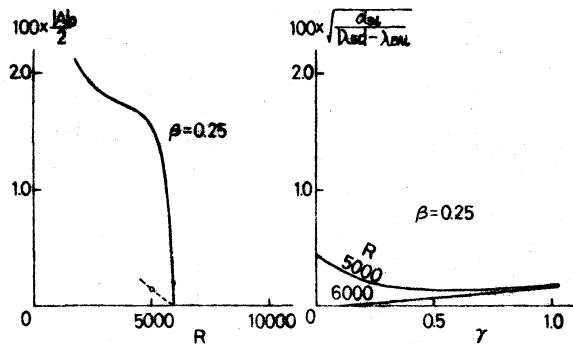


図3. 限界振幅

がである。図3の右図は  $\beta = 0.25$ ,  $R = 5000$  と  $6000$  の場合について、この限界振幅を  $\gamma$  に対して描いたものである。 $R = 5000$  に対しては  $\gamma$  がほぼ  $0.5$  付近で極小値を持つが、 $R = 6000$  では二次元波の線型解が増幅攪乱であるから、 $\gamma$  の小さい値に対しては(24)の右辺が負となり、限界振幅が存在しない。しかし、 $\gamma$  が約  $0.1$  以上からは限界振幅が現われて、それは単調に増加する。図3の左図には、二次元理論による限界振幅

$$\frac{|A|^2}{4} = - \frac{\alpha_{2i}}{\lambda_{Aai}} \quad (25)$$

を  $\beta=0.25$  の場合について実線で示してある。Reynolds 数を固定したとき、この曲線より大きい振幅の二次元波は増幅し、小さい二次元波は減衰する。同図中にある実線は右側の図から得られた最小限界振幅をプロットしたもので、この実線より大きい二次元波振幅に対しては三次元波の増幅が起ることを意味している。この図から明らかなように、二次元理論の限界振幅よりずっと小さい振幅に対して三次元波の増幅が始まる。二次元理論で有限攪乱の発達を論じることが不適当で、非線型理論にとっては三次元性を考慮することが本質的に必要であると言える。

再び (20)-(22) 式にもとづいて、 $d|A|^2/dx = d|B|^2/dx = d\theta/dx = 0$  をみたす平衡実の安定性を調べる。平衡実を  $(|A|_e^2, |B|_e^2, \theta_e)$  とすると、このまわりに展開した形

$$|A|^2 = |A|_e^2 + \xi_1, \quad |B|^2 = |B|_e^2 + \xi_2, \quad \theta = \theta_e + \xi_3 \quad (26)$$

を (20)-(22) に代入してつぎのような式を得る。

$$d\xi_n/dx = P_n \xi_1 + Q_n \xi_2 + R_n \xi_3 + \text{高次項} \quad (n=1, 2, 3) \quad (27)$$

高次項を省略して、 $\xi_n = a_n e^{px}$  ( $n=1, 2, 3$ ) なる解を仮定し、特性方程式を導くと、これは  $p$  に因する 3 次代数方程式になる。平衡実の安定条件は特性方程式の 3 根の実数部が全て負になることである。一方、平衡実としては (20)-(22) の右辺を 0 に等しいとおいた連立方程式の解が考えられるが、これは非常に

複雑なのであて調べることにし、ここではそれ以外の単純な平衡点だけを考える。つぎの3点は(22)をみたさないが、 $d|A|^2/dx = d|B|^2/dx = 0$ をみたす。

$$(I) |A|^2 = |B|^2 = 0, (II) \frac{|A|^2}{4} = -\frac{\alpha_{2i}}{\lambda_{AAi}}, |B|^2 = 0, (III) \frac{|B|^2}{4} = -\frac{\alpha_{3i}}{\lambda_{BBi}}, |A|^2 = 0 \quad (28)$$

しかも、これらの位置は $\theta$ に依存しないから一種の平衡点と考えることができる。点(I)は攪乱の無い状態で、これが安定になる条件は $\alpha_{2i} > 0, \alpha_{3i} > 0$ という線型理論の結果であるから興味がない。点(II)および点(III)について(27)の特性方程式を調べ、安定になるような $R$ と $\beta$ の範囲を求めた結果が図4に示してある。ただし、これは $\gamma = 0.5$ に対する結果である。 $|A|_0$ が点(II)、 $|B|_0$ が点(III)の平衡点を表わす。 $|A|_0$ が安定になる範囲は二次元中立曲線の下分枝に沿う非常に狭い小さな領域に限られるが、

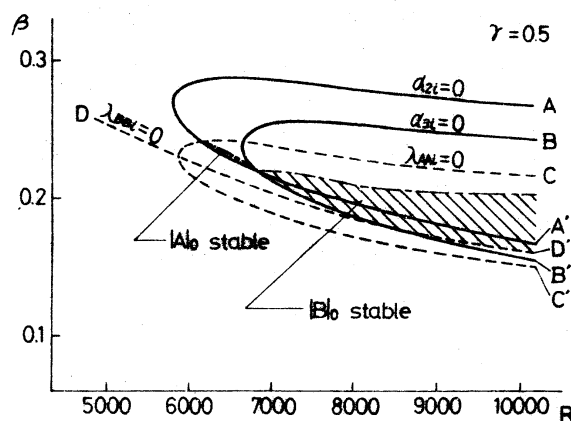


図4. 平衡点の安定領域

$|B|_0$ が安定になる範囲は、二次元中立曲線の下分枝を含むかなり広い領域をしめている。純粹に二次元の安定平衡波は生じにくいから、純粹に三次元の安定平衡波は比較的生じ易いことになる。

最後に、(20)-(22)の右辺を0にする平衡点およびその近傍に

おける攪乱の性質を調べる。(20)-(22)の $d|A|^2/dx$ ,  $d|B|^2/dx$ と $d\theta/dx$ を比べると, 前二者は $|A|^2$ または $|B|^2$ が掛る分だけ $d\theta/dx$ より小さいオーダーになっている。これは $(|A|^2, |B|^2, \theta)$ 空間のある点で表わされる攪乱が $x$ の増加とともに $\theta$ 方向に大きく動くことを意味している。そこで,  $d\theta/dx=0$ をみたす曲面, すなわち

$$\alpha_{3r} - \alpha_{2r} + \{\lambda_{BAr} - \lambda_{AAr} + |\lambda_{BC}| \cos(\theta - \sigma_{BC})\} \frac{|A|^2}{4} + \{\lambda_{BBr} - \lambda_{BAr} - |\lambda_{AC}| \cos(\theta + \sigma_{AC})\} \frac{|B|^2}{6} = 0 \quad (29)$$

の解曲面を描くと,  $\gamma$ が0.25以上の値に対しては図5のようになる。  $\theta$ が $2\pi$ まで変るうちに,

$\theta$ がほぼ一定になる二枚の面とこれと結ぶ $\theta$ 軸にほぼ平行な面から解曲面が形成されている。二枚の平行面の片方は $\theta$ の変化に対して安定になり, 他方は不安定になる。

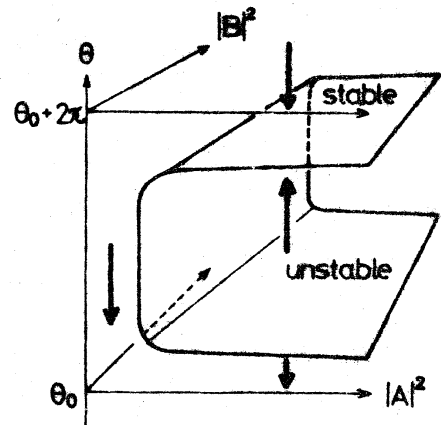


図5.  $d\theta/dx=0$ の曲面

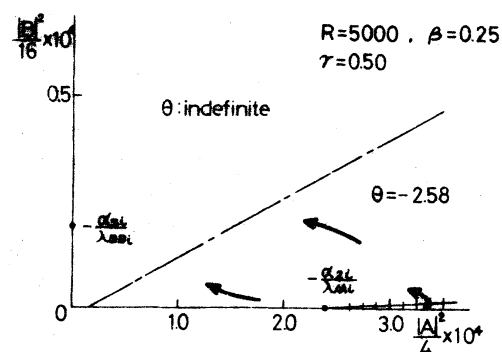
これは(29)を $\theta$ で微分したときの符

号を調べれば判る。空間中の任意な点から始まる攪乱は,  $x$ が増すにつれて急速にこの安定面の近傍に達すると考えられる。

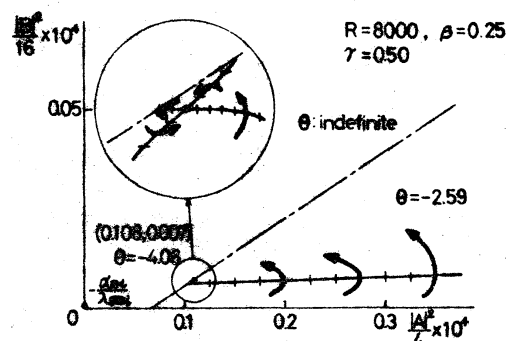
数値結果から $|\lambda_{BC}|$ が $|\lambda_{BAr} - \lambda_{AAr}|$ よりずっと大きいことが知られる

ので, この性質を利用すると, 安定面の $\theta$ は(29)の $|A|^2$ の係数を0にする $\theta$ の値 $\theta_1$ で十分近似できることが判る。 $\theta_1$ を(20)と(21)に代入すれば安定面上における二次元波振幅と三次元波振幅

の変化状態を知ることが出来る。  
 図6はこのような平面上における振幅変化の例を示したものである。a)では、始め二次元波だけが存在しても、すぐに三次元波が成長し、それにともなって二次元波は減衰方向に向う。最終的には一実鎖線を横切って $\theta$ が不定になる領域に入ってしまう。この領域では $\theta$ が無限に減少し、それに応じて(20)と(21)の符号が $\pm$ と $\mp$ と変り、二次元波と三次元波の振幅は非常に複雑な動きをする。b)は二次元理論では常に増幅攪乱の場合に相当する( $\alpha_{2i} < 0, \lambda_{AAi} < 0$ )。しかし、三次元波が発生するとa)の場合と同様に二次元波は減衰方向に向う。なお、この場合には(20)-(22)の右辺を全て0にする安定平衡実が存在する。平衡実とは図5の $\theta$ 軸に平行な面の上にあり、図6(b)では一実鎖線上の実で示されている。同時に、拡大図を示し、平衡実の近傍における振幅変化の状況を与えてある。この平衡実はいらぬ状の安定実である。



a) 亜限界の場合の例



b) 超限界の場合の例

図6. 振幅変化の様子



#### 4. 結 論

ここでは, Reynolds 数 5000 から 8000 の二次元ポアズイユ流における,  $\beta = 0.15 \sim 0.30$  の振動数を持つ二次元波と, 同じ振動数でスパン方向波数  $\gamma = 0.25 \sim 1.0$  を持つ三次元波の干渉を調べた。理論および数値解析によって得られた主な結果は以下のようである。

(1) 二次元波が有限の振幅を持つとき, それが比較的小さなものであっても, 三次元波の増幅を起こさせる。とくに, 亜限界 Reynolds 数では, 二次元理論から求まる限界振幅よりもずっと小さい二次元波振幅に対して三次元波の増幅が始まる。したがって, 二次元理論の限界振幅は本当の意味での限界値を与えているものではない。

(2) 三次元波の存在は二次元波に対して減衰効果をもたらす。これに対して, 二次元波が三次元波に与える影響は両波の位相差に依存するもので, 増幅作用か減衰作用かを一概に言うことはできない。

(3) 純粹に二次元の安定平衡波が生じる Reynolds 数と振動数の組合せは非常に狭い範囲に限られる。したがって, このような波を実験で観測することは難しい。一方, 純粹に三次元の安定平衡波は二次元中立曲線の下分枝に沿う比較的広い範囲で生じる。原理的には安定平衡な三次元波を実現す

ることは容易なはずである。

- (4) 三次元波が二次元波に比べて小さい場合、すなわち  $(|A|^2, |B|^2)$  平面で  $|A|^2$  軸に近い領域では、二次元波と三次元波の位相差はほぼ一定になる。このことは Benney-Lin 理論における仮定(二次元波と三次元波の位相速度を同じとする仮定)を正当化する根拠を与える。ただし、二次元波と三次元波には一定の位相差があることには注意する必要がある。非線型効果は二次元波と三次元波を同期させる作用を持つ。

- (5) ここで与えた理論からは、二次元波が存在するときに最も生じ易い三次元波のスパン方向波数  $\gamma$  を決定することはできなかった。この問題については Craik<sup>(14)</sup> の共振不安定理論がある。彼は基本二次元波に対し、その二倍の振動数を持つ二次元波と同じ位相速度を持ち、基本波と同じ振動数の三次元波が最も起り易いと主張している。この理論に従うと、ここで扱った Reynolds 数と振動数の範囲で最も起り易い三次元波のスパン方向波数  $\gamma$  は 1 又あるいはそれ以上の大きくなる。計算精度の問題からこのような大きな  $\gamma$  に対する計算を行なわなかったが、 $\gamma$  が 1 以上になっても攪乱の主要な性質はここに与えたものとあまり違わないものと思われる。

## 参 考 文 献

- 1) Lin, C.C. 1955 Hydrodynamic Stability. Cambridge Univ. Press.
- 2) Klebanoff, P.S., Tidstrom, K.D., Sargent, L.M. 1962 J. Fluid Mech. 12, 1.
- 3) Stuart, J.T. 1960 J. Fluid Mech. 9, 353.
- 4) Watson, J. 1960 J. Fluid Mech. 9, 371.
- 5) Watson, J. 1962 J. Fluid Mech. 14, 221.
- 6) Reynolds, W.C., Potter, M.C. 1967 J. Fluid Mech. 27, 465.
- 7) Pekeris, C.L., Shkoller, B. 1969 J. Fluid Mech. 39, 629.
- 8) Itoh, N. 1974 Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci. 17, 160.
- 9) Itoh, N. 1974 Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci. 17, 175.
- 10) Benney, D.J., Lin, C.C. 1960 Phys. Fluids, 3, 656.
- 11) Benney, D.J. 1961 J. Fluid Mech. 10, 209.
- 12) Benney, D.J. 1964 Phys. Fluids, 7, 319.
- 13) Stuart, J.T. 1961 Adv. Aero. Sci. 3, 121.
- 14) Craik, A.D.D. 1971 J. Fluid Mech. 50, 393.
- 15) Stewartson, K., Stuart, J.T. 1971 J. Fluid Mech. 48, 529.
- 16) Hocking, L.M., Stewartson, K., Stuart, J.T. 1972 J. Fluid Mech. 51, 705.
- 17) Davey, A., Hocking, L.M., Stewartson, K. 1974 J. Fluid Mech. 63, 529.
- 18) Itoh, N. 1974 Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci. 17, 65.